Educar, 17 (1990) 93-103

ALGUNES CONSIDERACIONS SOBRE LA RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA

Xavier Valls Aubert
Dpt. de Dtca. Matemàtiques i Ciències. U.A.B.

RESUMEN

Partiendo de la importancia que tiene la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, se presenta un problema que permite explorar las nuevas posibilidades. Se trata de evitar la forma totalmente acabada con que a menudo se presentan, el automatismo que rige los cálculos y el carácter único y exclusivo con que a veces se presenta la solución.

ABSTRACT

Beginning with the importance that problem-solving has in the teaching of mathematics, a problem that allows the exploring of new posibilities is shown. The object is to try and avoid the completely obsolete way in which they are often presented, the automatism that riles the operations as well as the unique and exclusive form in which the answer in sometimes gives.

1. Introducció

La meva experiència com a ensenyant de matemàtiques m'ha demostrat que si es vol obtenir un rendiment mínim en l'aprenentatge dels nostres alumnes els hi hem d'ensenyar a resoldre problemes. En la major part dels llibres de problemes de matemàtiques la resolució d'aquests, s'hi dóna sempre de forma totalment acabada sense donar a la persona que ha intentat resoldre'ls saber quines són les idees que han permès arribar a la solució ni si aquesta és la única solució possible. Com diu G. Polya recordant les preguntes que es plantejava en els seus temps d'estudiant: «Si, la solució sembla ser correcta, però com és possible descobrir aquesta solució?... i com puc jo mateix inventar i descobrir aquestes coses?»(1)

Crec que és de vital importància, donar una presentació heurística, fer veure en la resolució de problemes no únicament la solució sinó també el procés que guia cap a aquesta solució donant més que una exposició sintètica, el seguit de mètodes i idees que et porten cap a ella, doncs són aquests mètodes i aquestes idees les que poden ser útils per la resolució d'altres problemes. A més, és normalment durant la resolució de problemes on apareixen noves idees que poden donar lloc a nous descobriments, i per tant on el procés de creació matemàtica es manifesta en tots els seus aspectes. En aquest sentit s'expressa I. LAKATOS quan diu: «Alguns matemàtics professionals... diuen freqüentment que la introducció de l'estil heurístic exigiria escriure de nou els llibres de text i els faria tan llargs que mai es podrien llegir fins al final. També els articles s'allargarien molt. La resposta en aquest argument pedestre és: Intentem-ho».(2)

Aquestes consideracions són les que han fet que cregués que podria tenir un cert interès fer una presentació heurística de la resolució d'un problema. El que segueix, és precisament un intent en aquest sentit. És l'exposició de com vaig resoldre un problema.(3) He procurat mantenir la cronologia de totes les idees i tentatives que se'm van ocorrer per arribar a la solució i també comunicar un xic l'emoció dels diferents descobriments.

2. El problema

«Sandy McAllister va prometre a la seva dona un bonic present si ella era capaç d'estalvir una quantitat de monedes, d'un dòlar, suficient per tal que es puguin disposar en forma de quadrat (com amb 4 o 9 monedes), de triangle (com amb 3 o 6), de dos triangles i de tres triangles. Quin era el mínim número de monedes que va haver d'estalviar?. (S'exclou la resposta trivial d'una moneda). L'any següent va renovar el seu compromís però amb la condició de que la quantitat de monedes fos diferent. I així durant sis anys. Quin va ser l'estalvi anual?.»

(1) POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. México. 1982. Pg. 8.
(2) LAKATOS, I. *Pruebas y refutaciones*. Alianza Universidad. Madrid. 1978. Pg. 167.
(3) BEILER, A. *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathematics Entertains*. Dover. New York. 1964. Pg. 294. Problema 2.

Deixant de banda les connotacions més o menys masclistes del problema el vaig trobar interessant doncs precisament amb els alumnes estavem tractant qüestions sobre números triangulars, quadrats, pentagonals,...

3. Aclariments i primera sol·lució

Què vol dir que el número de monedes el poguem disposar en forma de quadrat no crec necessiti cap aclariment. Que la quantitat de monedes es pugui disposar en forma de triangle vol dir que podem construir un triangle amb totes les monedes, de la següent forma: primer situar una moneda com un dels vèrtexs, a sota un rengle amb dues monedes després un altre amb tres,..., fins a col·locar un últim rengle que serà el costat «n» serà necessari que disposem de tantes monedes com la suma dels «n» primers números, és a dir: (n+1)*n/2.

Un càlcul mental més o menys ràpid ens porta a la primera solució de les dues condicions inicials és 36 (quadrat de costat 6 i triangle de costat 8). Per comprovar les altres dues condicions vaig escriure els primers números triangulars 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 i 36 i ràpidament s'observa que efectivament també les verifica doncs: 15+21=36 i 6+15+15=36. Per tant ja tenia una solució i vaig passar a buscar-ne de més grans. Després d'una estona sense obtenir res vaig renunciar i vaig mirar quines eren les solucions que en Beiler donava.

4. La solució d'en Beiler i la tercera condició

«Els següents números són simultàniament quadrats, números triangulars, doble triangulars i triple triangulars:

n.º quadrat	cos. q.	cos. tr.	costats 2 triang.	costats 3 triang.
36	6	8	6 i 5	5, 5 i 3
1225	35	49	35 i 34	33, 32 i 16
41616	204	288	204 i 203	192, 192 i 195
141371	1189	1681	1189 i 1188	1121, 1120 i 560
48024900	6930	9800	6930 i 6929	6533, 6533 i 3267
1631432881	40391	57121	40391 i 40390	38081, 38080 i 19040

L'estalvi del primer any és de 36 monedes i el sisè any seria precís estalviar més mil cinc-cents milions de dòlars!.»

A la vista d'aquesta solució la veritat és que per un moment vaig pensar en deixar el problema, però la curiositat va poder més que jo. Immediatament em va cridar l'atenció el fet de que a la columna dels costats dels 2 triangles aquests fossin consecutius i el gran igual al costat del quadrat corresponent. Això em va fer pensar si la tercera condició no seria redundant(4).

Evident!, doncs donat un número quadrat perfecte n^2 el podem expressar com $(n+1)*n/2+n*(n-1)/2$ i per tant tot quadrat és suma de dos números triangulars i la tercera condició és supèrflua(5).

5. Apareixen unes successions força curioses

Tot seguit vaig centrar el meu interès en la columa dels costats dels quadrats i d'entrada no vaig veure com es podia passar de l'un al següent. Per passar del 6 al 35 es podia fer multiplicar per 6 i treure'n-hi un, però això ja no és cert per passar del 35 al 204. Aleshores s'em va ocorrer de fer el quocient entre dos termes consecutius i vaig obtenir:

5,833333333	5,82842725
5,8285714289	5,828427128
5,828431373	

Ep!, això ja semblava que funcionava un xic més. Quin podia ser el límit d'aquesta succesió?. Amb això no em seria possible calcular el costat del proper quadrat?. Provem-ho:

$40391*5{,}828427128=235416{,}0001.$

Vaja!, no està mal, no?. Però és clar s'havia de comprovar que realment 235416 era el costat d'un quadrat que era alhora un número triangular. Per tal de confirmar les meves sospites vaig passar a calcular la successió de quocients de costats de triangles que em va donar:

6,125	5,829863177
5,87755102	5,828673469
5,836805556	

(4) Es tractaria de seguir un dels màxims consells que G. Polya fa en el seu llibre anteriorment citat d'intentar simplificar el problema.
(5) Al dia següent se'm va ocórrer una forma geomètrica de veure-ho molt més maca. La diagonal del quadrat divideix aquest en dos triangles, i si associem aquesta a un d'ells ja ho tenim.

Bé!, tornava a convergir, i a més la convergència era cap al mateix límit segons semblava, encara que, potser, ho feia un xic més lentament. Apa!, a clacular el costat del triangle:

57121*5,828673469=332939,6572

Uf!, això no semblava aclarir quina podia ser. Ah!, és clar, l'aproximació considerada no era prou bona. Era millor considerar:

57121*5,828427128=332925,586

Vaja!, ara resultava que per comptes de permetre'm decidir entre els valors possibles els ampliava força. Bé de totes maneres podia utilitzar 235416 per calcular el quadrat: 55420693056. I a partir d'aquí averiguar quin dels possibles costats del triangle era la solució, vaig trobar 332928. Amb aquesta vaig trobar els dos nous quocients 5,828427125 per quadrats i 5,82846939 per triangles i aleshores podia calcular noves solucions com havia procedit. El proper costat de quadrat:

235416*5,828427125=1372105

Quina xamba!, aquest cop donava exacte i per tant l'aproximació obtinguda era òptima per a la màquina. Vaig intentar fer el mateix amb el costat del triangle i vaig obtenir:

332928*5,82846939=1940460,657 i
332928*5,828427125=1940446,586

Massa diferència per poder treballar amb comoditat i aleshores s'em va ocorrer una altra possibilitat fer els quocients entre els costats dels triangles i els dels quadrats. Eren aquests:

1,33333333333	1,41414141
1,4	1,414201183
1,411764706	1,414211438
1,413793103	

Ep!, això era bastant més interessant aquests quocients semblaven tenir cap a $\sqrt{2}$ d'una forma ben clara. Llavors vaig utilitzar aquest fet per calcular el proper costat del triangle:

1372105*$\sqrt{2}$=1940449,499

28 = 21 + 6 + 1	....	7, 6, 3, 1
55 = 28 + 21 + 6	....	10, 7, 6, 3
91 = 45 + 45 + 1	....	13, 9, 9, 1
136 = 55 + 45 + 36	....	16, 10, 9, 8
190 = 91 + 78 + 21	....	19, 13, 12, 6

No semblava que hi hagués una pauta gaire clarificadora i per tant vaig intentar noves descomposicions, recordant que en la cinquèna columna de la solució del BEILER els costats grans eren en certes ocasions iguals i en d'altres consecutius i aquests serien els que ens ocupen. Vaig provar amb altres descomposicions:

28 = 15 + 10 + 3	....	7, 5, 4, 2
55 = 28 + 21 + 6	....	10, 7, 6, 3
91 = 45 + 36 + 10	....	13, 9, 8, 4

No en vaig necessitar més, ja veia la pauta: El número triangular de costat 3n+1 és suma dels números triangulars de costats 2n+1, 2n i n:

NT(3n+1) = (3n+2)*(3n+1)/2 = (9n2+9n+2)/2
NT(2n+1) + NT(2n) + NT(n) = (2n+2)*(2n+1)/2 + (2n+1)*2n/2 +
+ (n+1)*n/2 = (4n2+6n+2)/2 + (4n2+4n)/2 + (n2+n)/2 = (9n2+9n+2)/2

Per tant podem resumir en general que tot número triangular es pot descomposar com suma de tres números triangulars[8].

7. La solució final

Bé, arribats aquí tenim que les dues condicions últimes són innecessaries i per tant el nostre problema queda reduït a la condició de trobar números que siguin alhora quadrats i números triangulars, és a dir, que verifiquin l'equació diofàntica següent:

$$x^2 = (y+1)\ y/2 \quad \text{o} \quad 2\times 2 = y^2 + y \quad \text{o millor} \quad y^2 + y - 2x^2 = 0$$

(8) És una propietat que no sé si mai ha estat enunciada. Si fos així en reclamo la paternitat. Fixeu-vos en que ara es posa de manifest la idea de que a partir del problema original hem obtingut altres resultats que fins aleshores desconeixiem.

i resolent l'equació en funció de x obtenim:

$$y = (-1 \pm \sqrt{1+8x^2})/2$$

Ara el problema queda reduït a trobar valors de x que facin que l'expressió $1+8x^2$ sigui un quadrat perfecte, és a dir:

$$p^2 = 1+8x^2 \text{ o millor } p^2 - 8x^2 = 1$$

I ara vaig veure que es tractava d'una equació de Pell-Fermat[9], i per tant tot va consistir en aplicar la forma en que es solucionen al nostre cas:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

la podem escriure com segueix:

$$(x+y\sqrt{D})*(x-y\sqrt{D}) = 1$$

i ara elevant a n:

$$(x+y\sqrt{D})^n*(x-y\sqrt{D})^n = 1$$

on cada un dels factors té una expressió de la següent forma:

$$(x+y\sqrt{D})^n = X_n + Y_n\sqrt{D} \qquad (1)$$
$$(x-y\sqrt{D})^n = X_n - Y_n\sqrt{D} \qquad (2)$$

on X_n i Y_n són la suma dels termes senars o parells del binomi i com a més són solucions de l'equació de Pell-Fermat original, ja que:

$$(X_n + Y_n)*(X_n - Y_n) = 1$$

i per tant

$$X_n^2 - DY_n^2 = 1$$

(9) Aquí es posa de manifest la importància del consell de G. POLYA sobre la simplificació del problema a que m'he referit en la nota nº 4, doncs un cop simplificat el problema immediatament vaig ser capaç de reduir-lo a conceptes coneguts.

i d'aquí aleshores aïllant-les en les relacions (1) i (2) obtenim:

$$X_n = ((x+y\sqrt{D})^n + (x-y\sqrt{D})^n)/2 \quad (3)$$
$$Y_n = ((x+y\sqrt{D})^n - (x-y\sqrt{D})^n)/2\sqrt{D} \quad (4)$$

És a dir, si x i y són solucions de l'equació de Pell-Fermat aleshores (3) i (4) ens donen el conjunt de totes les solucions de l'equació. Això en el nostre cas seria a partir de la nostra equació, $p^2-8x^2=1$, tenim que com a solució particular $p=3$ i $x=1$ i per tant el conjunt de solucions vindrà donada per:

$$p_n = ((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n)/2$$
$$x_n = ((3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n)/2\sqrt{8}$$

i per tant

$$y_n = (-1 + ((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n)/2)/2$$

que una substitució de valors per n igual a 2 fins a 14 dóna els valors que haviem obtingut. Per altra banda totes aquelles observacions sobre els límits a que tendien les diferents succesions ara queden completament aclarides doncs és evident que el límit a on tendeix el quocient dels costats de quadrats succesius.

$$x_n + 1/x_n = (3+\sqrt{8})^n + 1 - (3-\sqrt{8})^n + 1)/(3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n) = 3+\sqrt{8}$$

que segons la calculadora és 5,828427125, (ja ho sabiem, no?). El mateix és cert pel quocient de costats dels triangles i pel que fa al quocient de costat triangle, costat quadrat tenim:

$$y_n/x_n = ((-1+((3+\sqrt{8})^n + (E-\sqrt{8})^n)/2)/2)/(((3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n)/2\sqrt{8}) =$$
$$= \sqrt{2}*(-1+((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n)/((3+\sqrt{8})^n - (3-\sqrt{8})^n) = \sqrt{2}$$

que també ja coneixiem.

9. Conclusió

Si el problema hagués estat resolt en un llibre convencional de resolució de problemes segurament hauriem trobat una resolució que no diferiria gaire del següent tipus de raonament:

Donat que tot número quadrat és suma de dos números triangulars i que tot número triangular és suma de tres números triangulars el problema consisteix en resoldre l'equació $x^2=(y+1)*y/2$ que convenientment transformada es redueix a un de Pell-Fermat i dóna la solució desitjada.

Personalment crec que, encara que la meva presentació no és tan elegant i per descomptat molt més llarga, el sacrifici ens compensa sobradament doncs no únicament hem sigut capaços de veure la necessitat de tots els passos sinó que a més hem obtingut coneixements nous i nous problemes que ens permetran continuar la nostra feina.

BIBLIOGRAFÍA

BEILER, A. *Recreations in the Theory of Numbers: The Queen of Mathemetics Entertains*. Dover. New York. 1964.

ITARD, J. *Arithmétique et Théorie des nombres.* P.U.F. Paris. 1967.

LAKATOS, I. *Pruebas y refutaciones.* Alianza Universidad. Madrid. 1978.

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* Trillas. México. 1982.